Borel-Cantelliの定理の拡張
An Extension of Borel-Cantelli's Theorem

中嶋眞澄
Masumi Nakajima
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0191, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概要
Abstract
We prove here an extension of Borel-Cantelli's theorem.

Key words ; probability theory, Borel-Cantelli's theorem.
Mathematics Subject Classification 2010;　60F99.

次の Borel-Cantelli の定理の拡張を証明する。
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ をある確率空間とし、$B_n \in \mathcal{F}$, $(n=1,2,\cdots)$ とする。

定理 1　数列 $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$, $K_m < K_{m+1}$ for$\forall m$, $K_m \to \infty$ $(as\ m \to \infty,\ K_m \in \mathbf{N})$ を固定して、

$$\sum_{m=1}^{\infty} P\{B_{K_m+l_m}\} < +\infty \text{ for } 0 < \forall l_m \leq K_{m+1} - K_m, \qquad (l_m \in \mathbf{N})$$

であるならば、

$$P\{\limsup_{n\to+\infty} B_n\} = 0$$

である。

定理1の証明

$$C_n := \bigcup_{k \geq n} B_k$$

として、定理の結論を否定すると (背理法)

$$0 < P\{\limsup_{n\to+\infty} B_n\} = P\{\lim_{n\to\infty} C_n\} =: P\{C\} \leq P\{C_m\}$$

$$(m = 1, 2, \cdots)$$

である。

次に $\mathbf{N} = \{m\}_{m=1}^{\infty}$ を部分列 $\{m_j(k)\}_{j=1}^{\infty}$, $m_j(k) < m_{j+1}(k)$, $k \in \Lambda$, ${}^\sharp\Lambda = {}^\sharp\mathbf{N}$(countably many) に次の如く分解する:

$$\{m\}_{m=1}^{\infty} = \bigcup_{k\in\Lambda} \{m_j(k)\}_{j=1}^{\infty},$$

$$\{m_j(k)\}_{j=1}^{\infty} \cap \{m_j(l)\}_{j=1}^{\infty} = \emptyset \ (k \neq l),$$

$${}^\sharp\{\{m_j(k)\}_{j=1}^{\infty} \cap (K_m, K_{m+1}]\} \leq 1 \text{ for } \forall m \in \mathbf{N}.$$

$$D_N^{(k)} := \bigcup_{m_j(k) \geq N} B_{m_j(k)},$$

$$D^{(k)} := \lim_{N\to\infty} D_N^{(k)} = \limsup_{j\to\infty} B_{m_j(k)},$$

と置くと、

$$D_N^{(k)} \supset D_{N+1}^{(k)},\ C_N = \bigcup_{k\in\Lambda} D_N^{(k)},\ C = \bigcup_{k\in\Lambda} D^{(k)}$$

で、背理法の仮定 $P\{C\} = P\{\lim_{n\to\infty} C_n\} > 0$ と ${}^\sharp\Lambda = {}^\sharp\mathbf{N}$ より

$$\exists l \in \mathbf{N} \text{ such that } P\{D^{(l)}\} > 0$$

となる。$K := P\{D^{(l)}\}$ と置くと、 定理の前提より

$$\exists N \in \mathbf{N} \textit{ such that}$$

$$\frac{K}{2} > \sum_{m \geq N} P\{B_{K_m+l_m}\} \geq \sum_{m_j(l) \geq N} P\{B_{m_j(l)}\}$$

$$\geq P\{\bigcup_{m_j(l) \geq N} B_{m_j(l)}\} = P\{D_N^{(l)}\} \geq P\{D^{(l)}\} = K > 0$$

であるが、これは矛盾である。従って

$$P\{C\} = P\{\limsup_{n\to\infty} B_n\} = 0.$$

参考文献

[1] Kawata,T. 河田龍夫: *Introduction to Fourier Analysis and Probability* フーリエ解析と確率論入門, 1971, Nihon-Hyouron-sha, 日本評論社, Tokyo 東京，(v+156)pp..